

Copie anonyme - n°anonymat : 434421



G4-00045
434421
Mat Appro

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 26

Session : 2019

Épreuve de : Maths Appro EM CYON

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Problème 1.

Partie 1.

1. a. On sait que $M^2 = A$. Donc $M^2 M = AM$
D'autre part, comme $M^2 M = MM^2 = MA$, on a bien :
 $AM = MA$

2. Supposons A inversible. Donc A^{-1} existe, et on a :
 $M^2 A^{-1} = I_n$, soit $M(MA^{-1}) = I_n$, donc M est inversible et $M^{-1} = MA^{-1}$.

Supposons maintenant que M soit inversible. On a donc l'existence de M^{-1} , et :
 $A(M^{-1})^2 = I_n$, donc A est inversible et $A^{-1} = (M^{-1})^2$.

Donc A est inversible si M est inversible

3. a. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Donc $A^2 = -I_2$. On en déduit que le polynôme $X^2 + 1$ annule A . Donc les valeurs propres de A étant comprises dans les racines de $X^2 + 1$, on en déduit que A n'admet pas de valeur propre réelle, donc A n'est pas diagonalisable.

b. On calcule $M^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+cb & ab+bd \\ ac+cd & cd+d^2 \end{pmatrix}$

Donc par identification, si $M^2 = A$, alors :

$$\begin{cases} a^2 + cb = 0 \\ ab + bd = 1 \\ ac + cd = -1 \\ cd + d^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2 - d^2 = 0 \\ ab + bd + ac + cd = 0 \\ ac + cd = -1 \\ cd + d^2 = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\begin{cases} (a-d)(a+d) = 0 \\ b(a+d) + c(a+d) = 0 \\ ac + cd = -1 \\ cd + d^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-d)(a+d) = 0 \\ (a+d)(b+c) = 0 \\ ac + cd = -1 \\ cd + d^2 = 0 \end{cases}$$

Comme d'après L_3 on ne peut pas avoir $a+d=0$ (car on aurait $0 = -1$ ce qui est absurde), on a donc : $a-d=0$ et $b+c=0$

Donc si M est solution de $M^2 = A$, alors $a=d$ et $b=-c$.

c.

* Mais $\dim A = 2$ (deuxième colonne nulle et deux autres non colinéaires), donc $\dim \ker A = 1$ (théorème du rang), donc A n'est pas diagonalisable.

4. a. La matrice A est triangulaire inférieure et tous ses coefficients diagonaux sont nuls. 0 est donc son unique valeur propre d'ordre 3, donc A est diagonalisable. Mais $\dim$ *

b. On a $M^4 = A^2$

On calcule :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $M^4 \neq 0_{M_3(\mathbb{R})}$

$$M^6 = A^3$$

On calcule:

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a donc bien $M^6 = 0_{M_3(\mathbb{R})}$

c. Montrons que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre (avec $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$)

Soient donc $\alpha_0, \dots, \alpha_{p-1} \in \mathbb{R}$ tels que,

$$\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^k(u) = 0.$$

On applique f^{p-1} par homom : $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k f^{p-1+k}(u) = 0$

Mais on sait que $f^p = f^{p+1} = \dots = f^{p-2} = 0$. Donc l'équation ci-dessus donne $\alpha_0 f^{p-1}(u) = 0$, d'où, comme $f^{p-1}(u) \neq 0$: $\alpha_0 = 0$.

On peut répéter ce processus en appliquant à la suite $f^{p-2}, \dots, f^0$ par homom :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \dots = \alpha_{p-1} = 0.$$

Donc il existe $u \neq 0_{\mathbb{R}^3}$ tel que $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ soit libre.

d. D'après la question précédente, on a :

$$\text{card}(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$$

Donc $p \leq 3$. Mais on a vu que $M^4 \neq 0$ et que $M^6 = 0$. C'est donc absurde et il n'existe pas $M \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $M^2 = A$.

5a. Le polynôme $x^2 - 1$ annule M . Donc

comme ses racines sont -1 et 1 , on a :

$$\text{Spec}(M) \subset \{-1, 1\}.$$

b. Soit $x \in \text{Ker}(f - \text{id}) \cap \text{Ker}(f + \text{id})$. On a donc

$$\begin{cases} f(x) - x = 0 \\ f(x) + x = 0 \end{cases}, \text{ d'où } -2x = 0 \text{ et } x = 0.$$

Donc $\text{Ker}(f+id) \cap \text{Ker}(f-id) = \{0\}$.

De plus, soit $y \in \text{Im}(f-id)$

donc il existe x tq $f(x) - x = y$

$$\begin{aligned} \text{D'alors : } (f+id)(y) &= f(y) + y \\ &= f^2(x) - f(x) + f(x) - x \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $\text{Im}(f-id) \subset \text{Ker}(f+id)$

Soit $x \in \text{Ker}(f+id)$, donc $f(x) + x = 0$

¶ c. On en déduit que $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(M - I_n) \oplus \text{Ker}(M + I_n)$
 Donc $\dim \text{Ker}(M - I_n) + \dim \text{Ker}(M + I_n) = \dim \mathbb{R}^n$. Donc
 -1 et 1 sont bien valeurs propres de M et M
 est diagonalisable

d. Si $M^2 = -I_n$, alors M est diagonalisable et a
 pour valeurs propres -1 et 1 . Elle est donc
 semblable à une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_m \end{pmatrix}, \text{ où } \forall i \in [1, m], \varepsilon_i = \begin{cases} -1, 1 \end{cases}$$

(On peut choisir une base orthogonale de vecteurs propres
 de M dans laquelle la matrice de M est celle
 écrite ci-dessus). De plus, on observe bien que

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \varepsilon_m \end{pmatrix}^2 = I_n.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 434421

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Emplacement
QR Code

Épreuve de : Maths EM

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc l'ensemble des matrices solution de $M^2 = I_n$ est l'ensemble des matrices semblables à :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \varepsilon_m \end{pmatrix}, \text{ où } \forall i \in [1, m], \varepsilon_i \in \{-1, 1\}$$

6. a. A possède n valeurs propres distinctes, elle est donc diagonalisable et il existe donc

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ et } P \text{ inversible telle que :}$$
$$A = PDP^{-1}$$

b. Supposons que $M^2 = A$. On a :

$$N^2 = P^{-1}MP P^{-1}MP = P^{-1}M^2P = P^{-1}AP$$

Mais $A = PDP^{-1}$, d'où $P^{-1}AP = D$. Donc $N^2 = D$.

Supposons que $N^2 = D$. Donc $PN^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$.

Mais $PN^2P^{-1} = M^2$. Donc $M^2 = A$.

Donc $M^2 = A \Leftrightarrow N^2 = D$.

c. On a $N^2 = D$ donc $ND = DN$. d'après la question 1.

d. On écrit $M = \begin{pmatrix} \mu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mu_n \end{pmatrix}$.

Donc $M^2 = A$ si et seulement si: $\forall i \in [1, n], \mu_i^2 = \lambda_i$.
 Si A admet ^{au moins} une valeur propre strictement négative, on aurait donc l'existence de $i_0 \in [1, n]$ tel que $\mu_{i_0}^2 < 0$, ce qui est absurde. Donc si A admet une valeur propre strictement négative, alors $M^2 = A$ n'admet pas de solution.

e. Dans le cas où les valeurs propres de A sont toutes positives, on a:

$M^2 = A$ si et seulement si $\forall i \in [1, n], \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$.

Donc M est semblable à $\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$.

Donc l'ensemble des solutions dans le cas où $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n$ est l'ensemble des matrices semblables à

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}.$$

7. On sait que A est symétrique et elle est donc diagonalisable. Donc il existe $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale et P orthogonale, telles que :

$$A = P D P^{-1}$$

Mais on sait d'après la question 6. c qu'on peut trouver N une matrice diagonale telle que $N^2 = I$

Donc : $A = P N^2 P^{-1} = (P N)^{-1} (P N)$

On peut donc ~~$N \neq P N$~~ on a : $\begin{aligned} P N &= P N^{-1} (P N) \\ &= P N P \\ &= N P \end{aligned}$

Si M_1 et M_2 sont symétriques donc diagonalisables et il existe donc P_1 et P_2 des matrices orthogonales telles que :

$$\begin{cases} M_1 = P_1 D_1 P_1^{-1} \\ M_2 = P_2 D_2 P_2^{-1} \end{cases}$$

ii. On a : $M_1^2 = P_1 D_1^2 P_1^{-1}$

Donc $D_1^2 = P_1^{-1} M_1^2 P_1$

et : $D_1^2 P = D_1^2 P_1^{-1} P_2 = P_1^{-1} M_1^2 P_1 P_1^{-1} P_2 = P_1^{-1} M_1^2 P_2$

Mais on a : $D_2^2 = P_2^{-1} M_2^2 P_2$

Donc $P D_2^2 = P_1^{-1} P_2 P_2^{-1} M_2^2 P_2 = P_1^{-1} M_2^2 P_2$

Comme $M_1^2 = M_2^2$, on a bien :

$D_1^2 P = P D_2^2$

Le coefficient en position ij de $D_1^2 P$ est $a_i^2(P)_{ij}$ et celui de $P D_2^2$ est $(P)_{ij} b_j^2$.

Donc

$a_i^2(P)_{ij} = (P)_{ij} b_j^2$

iii. Soit $(i, j) \in [1, m]^2$.

Partie 2.

8. Soient A_1 et A_2 dans $M_n(\mathbb{R})$ ainsi que $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{tr}({}^t(\lambda A_1 + A_2)B) &= \text{tr}(\lambda {}^tA_1 + {}^tA_2 B) \\ &= \lambda \text{tr}({}^tA_1 B) + \text{tr}({}^tA_2 B) \end{aligned}$$

(par linéarité de la trace)

Donc $(\lambda A_1 + A_2, B) = \lambda (A_1, B) + (A_2, B)$, donc $(,)$ est linéaire à gauche. De plus, $\text{tr}({}^tAB) = \text{tr}({}^t({}^tAB)) = \text{tr}({}^tBA)$

Donc $(,)$ est symétrique et est donc bilinéaire.

De plus :

$$(A, A) = \text{tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^n [{}^tAA]_{i,i}$$

$$\text{Mais : } [{}^tAA]_{i,i} = [A]_{i,i}^2 \quad [{}^tAA]_{i,i} = \sum_{k=1}^n [A]_{k,i}^2$$

Donc :

$$(A, A) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n [A]_{k,i}^2 \geq 0, \text{ donc } (,)$$

est p.n.f. Finalement :

$$(A, A) = 0 \Rightarrow \forall (k, i) \in [1, n]^2, [A]_{k,i} = 0$$

Code épreuve : 295

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de : Maths EM

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

Donc $(A, A) = 0 \Rightarrow A = 0$, donc $(\cdot, \cdot)$ est défini.
Donc $(\cdot, \cdot)$ est un produit scalaire.

9. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$.

On a : $\|M\|_2^2 = (M, M) = \text{tr}(MM)$

Mais :

$$\text{tr}(MM) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (M)_{k,i}^2$$

$$\text{Mais } (M, M) = \text{tr}(MM) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (M)_{k,i}^2$$

$$\leq n \sum_{k=1}^n \max_{1 \leq i \leq n} (M)_{k,i}^2$$

$$\leq n^2 \max_{1 \leq i, k \leq n} (M)_{k,i}^2$$

$$\text{Donc : } \|M\|_2 \leq n \sqrt{\max_{1 \leq i, k \leq n} (M)_{k,i}^2} = n \max_{1 \leq i, k \leq n} (|M_{k,i}|)$$

Donc :

$$\|M\|_2 \leq n \max_{1 \leq i, k \leq n} (|M_{k,i}|)$$

10. Soient K_1 et K_2 dans $M_n(\mathbb{R})$. On leur donne leurs coefficients génériques $(k_1)_{ij}$ et $(k_2)_{ij}$.

Donc :

$$(K_1 M)_{ij} = \sum_{s=0}^m [K_1]_{i,s} [M]_{s,j} = \sum_{s=0}^m (k_1)_{i,s} [M]_{s,j}$$

et :

$$(K_1 M K_2)_{ij} = \sum_{b=0}^m \sum_{s=0}^m (k_1)_{i,s} [M]_{s,b} \dots \quad \text{--- an abrévi}$$

11. a. γ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\gamma'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$.
 Donc $\gamma'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} \right)$, et γ' est donc du signe de $x^2 - 1$. Donc on a le tableau de variation de γ suivant:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
γ'		+	0	-	0	+
γ	$-\infty$		0		1	$+\infty$

b. Soit $P(m)$: "si $a > 0$, alors $(u_m)_{m \geq 1}$ est bien définie, $|u_m| \geq 1$ et u_m a le même signe que a ".

• pour $m = 1$, on a $u_1 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right)$, donc u_1 est bien définie et d'après le tableau précédente: $\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \geq 1$, donc $|u_1| \geq 1$.
 Donc $P(1)$.

• soit $m \geq 1$. On admet $P(m)$.

$$P(m) \implies u_{m+1} = \frac{1}{2} \left(u_m + \frac{1}{u_m} \right)$$

Donc:

$$|u_{m+1}| = \frac{1}{2} \left| u_m + \frac{1}{u_m} \right| \geq 1 \text{ car}$$

$$\left| u_m + \frac{1}{u_m} \right| \geq 2.$$

Donc $(u_{m+1})_{m \geq 1}$ est bien définie, $|u_{m+1}| \geq 1$ et $u_{m+1} > 0$ car $u_m > 0$ et $\frac{1}{u_m} > 0$.

Donc $P(m+1)$.

Conclusion: $\forall m \geq 1$, $(u_m)_{m \geq 1}$ est bien définie, $|u_m| \geq 1$ et u_m a le même signe que a .

c.

d. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \geq 1$. On a: $\varphi'(x) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)$

Donc:

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{2} \left(\left| 1 - \frac{1}{x^2} \right| \right) = \frac{1}{2} \left| \frac{x^2 - 1}{x^2} \right| \\ \leq \frac{1}{2} |x^2 - 1|.$$

Mais on a: $1 - \frac{1}{x^2} \leq 1$ car $x^2 \geq 1$ (car $|x| \geq 1$)

Donc:

$$|\varphi'(x)| \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout réel } x \text{ tel que } |x| \geq 1$$

e. ~~D'après l'égalité des accroissements finis~~, on a:

~~Soit $P(n)$: " $|u_n - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \varepsilon|$ "~~
pour $n = 1$, on a:

On a: $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$ (car $\varphi(u_n) = u_{n+1}$).

Donc d'après l'égalité des accroissements finis:

$$\begin{aligned} |\varphi(u_{n-1}) - \varphi(\varepsilon)| &\leq \frac{1}{2} |u_{n-1} - \varepsilon| \\ &= \frac{1}{2} |\varphi(u_{n-2}) - \varphi(\varepsilon)| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |u_{n-2} - \varepsilon| \end{aligned}$$

On procède par itération et on a dès:

$$|u_n - \varepsilon| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |a - \varepsilon|.$$

12-a. A est symétrique donc diagonalisable et il existe donc P orthogonale telle que $D_0 = P^{-1}AP$ soit diagonale et inversible (car de même rang que A qui est elle-même inversible).

Problème 2.

Partie I.

1. Soit $P(m)$: " I_m converge et $I_m = m!$ ".

• pour $m=0$, on a bien évidemment la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-u} du$, qui vaut 1. Donc $P(0)$.

• soit $m \geq 0$. On admet $P(m)$.

$$I_{m+1} = \int_0^{+\infty} u^{m+1} e^{-u} du = P(m+2) = (m+1)!$$

Donc I_{m+1} converge et vaut $(m+1)!$. Donc $P(m+1)$.

Conclusion: $\forall m \in \mathbb{N}$, I_m converge et vaut $m!$

$$2. h_n(t) = \begin{cases} n^2 & \text{si } 0 < t \leq \frac{1}{n} \\ -n^2 & \text{si } \frac{1}{n} < t \leq \frac{2}{n} \\ 0 & \text{si } t \in]0, \frac{2}{n}] \end{cases}$$

Donc la fonction h_n est croissante sur $]0, \frac{1}{n}]$, décroissante sur $]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ et nulle ailleurs, donc:

Copie anonyme - n°anonymat : 434421

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

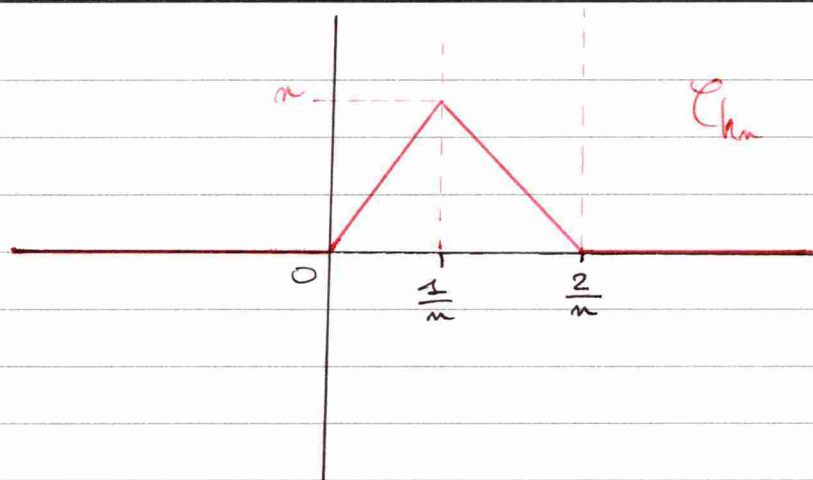
Nombre de pages : 25

Session : 2-24

Épreuve de : Maths EM

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre



On observe que $\forall t \in \mathbb{R}, h_n(t) \geq 0$. De plus, on a :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) dt &= \int_0^{\frac{2}{n}} h_n(t) dt = \int_0^{\frac{1}{n}} n^2 t dt + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} n^2 \left(\frac{2}{n} - t \right) dt \\
 &= n^2 \int_0^{\frac{1}{n}} t dt + 2n \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n} \right) - n^2 \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} t dt \\
 &= n^2 \left(\frac{1}{2n^2} \right) + 2 - n^2 \frac{1}{2} \left(\left(\frac{2}{n} \right)^2 - \left(\frac{1}{n} \right)^2 \right) \\
 &= \frac{1}{2} + 2 - n^2 \left(\frac{3}{2n^2} \right) \\
 &= 1.
 \end{aligned}$$

Donc h_n est bien une densité de probabilité.

b. $t \in [0, 1]$ est fixé. On a $\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$
 et $\frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = +\infty$ si $t = 0$
 et 0 sinon

c.

Partie 2.

3. ~~soit~~ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par linéarité de l'espérance, on a $E(S_n) = \sum_{i=1}^n E(Y_i) = \frac{n}{\lambda}$ car $Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.

De plus, par indépendance des $Y_1 \dots Y_n$, on a :

$$\text{V}(S_n) = \sum_{i=1}^n \text{V}(Y_i) = \frac{n}{\lambda^2}.$$

4. a. On sait que $Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, donc $\lambda Y_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, d'où $\forall i \in \mathbb{N}^* \dots, X_i \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, d'où $X_i \hookrightarrow f(1)$

b. Soit $P(n)$: " $\lambda S_n \hookrightarrow f(n)$ ".

- pour $n=1$, on a $\lambda S_1 = \lambda Y_1 \hookrightarrow f(1)$, donc $P(1)$.

- soit $m \geq 1$. On admet $P(m)$.

$$\lambda S_{n+m} = \lambda S_n + \lambda Y_{n+m}$$

Mais $\lambda S_n \hookrightarrow f(m)$, $\lambda Y_{n+m} \hookrightarrow f(1)$, donc par stabilité de la loi f par somme indépendante,

$\lambda S_n \hookrightarrow f(n)$, donc $P(n)$
 Conclusion: $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda S_n \hookrightarrow f(n)$

c. $(\lambda S_n)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$, donc $(S_n)(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{+*}$

Donc $\forall x \notin \mathbb{R}^{+*}$, $P(S_n \leq x) = 0$

Soit $x \geq 0$. $P(S_n \leq x) = P(\lambda S_n \leq dx)$
 $= F_{\lambda S_n}(dx)$

or $F_{\lambda S_n}$ est la répartition de λS_n . Donc une répartition de S_n est donnée par:

$$f_{S_n}(x) = f_{\lambda S_n}(dx)$$

D'ait une densité de S_n , obtenue en dérivant, est,

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda f_{\lambda S_n}(dx) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

D'ait, comme $\lambda S_n \hookrightarrow f(n)$:

$$f_{S_n}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} (dx)^{n-1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

S.a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. 1 admet une espérance n l'intégrale définie par:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\lambda}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} (dx)^{n-1} dx \text{ u absolument}$$

Mais: $\frac{1}{x} \times \frac{\lambda}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} (dx)^{n-1} = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-2}$

~~$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\lambda}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} (dx)^{n-1} dx$~~

l'intégrale de terme général $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{n-2} dx$

ou on use

Procédons au changement de variable affine. φ est bijectif de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ $u = \lambda x$.

donc $dx = \frac{1}{\lambda} du$ et les intégrales obtenues ont de même nature et égales en cas de convergence :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^{n-2} dx &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{+\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n-2} \times \frac{1}{\lambda} du \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \frac{1}{\lambda^{n-1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-2} du. \end{aligned}$$

Cette dernière intégrale converge si $n-2 \geq 0$, c'est à dire si $n \geq 2$. Donc $\frac{1}{S_n}$ admet une espérance si $n \geq 2$, et dans ce cas :

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{S_n}\right) &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \frac{1}{\lambda^{n-1}} (n-2)! \\ &= \frac{\lambda}{n-1}. \end{aligned}$$

b. $\frac{1}{S_n}$ admet une variance si $E\left(\frac{1}{S_n^2}\right)$ existe c'est à dire si :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} \times \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} (x)^{n-1} dx \text{ converge.}$$

On pose $u = \lambda x$. Donc comme précédemment, on a les mêmes intégrales obtenues et elles sont en cas de convergence et elles sont de même nature :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-3} dx &= \int_0^{+\infty} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-u} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{n-3} \times \frac{1}{\lambda} du \\ &= \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \times \frac{1}{\lambda^{n-2}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-3} du \end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{S_n}$ admet une variance si $n \geq 3$.
Dans ce cas :

$$E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \frac{\lambda^2}{\Gamma(n)} \times (n-3)! = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)}.$$

D'où :

$$V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{\lambda^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{\lambda^2}{(n-1)^2}.$$

Copie anonyme - n°anonymat : 434421

Emplacement
QR Code

Code épreuve : 295

Nombre de pages 25

Session : 2024

Épreuve de : Maths EM

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $W_n(\omega) = \mathbb{R}$.

$$\text{On a } P(W_n \leq x) = P\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n - \sqrt{n} \leq x\right)$$

$$= P\left(\frac{\lambda}{\sqrt{n}} S_n \leq x + \sqrt{n}\right)$$

$$= P\left(\lambda S_n \leq \sqrt{n} x + n\right)$$

$$= P\left(S_n \leq \frac{1}{\lambda} (\sqrt{n} x + n)\right)$$

Donc une répartition de W_n est :

$$F_{W_n}(x) = F_{S_n}\left(\frac{1}{\lambda} (\sqrt{n} x + n)\right)$$

D'où en dérivant, une densité de W_n est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_{W_n}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\lambda} f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n} x}{\lambda} + \frac{n}{\lambda}\right)$$

$$7.a. \text{ On a } E(W_n) = \frac{\lambda}{\sqrt{n}} E(S_n) - \sqrt{n} = 0.$$

$$V(W_n) = \frac{\lambda^2}{n} V(S_n) = 1.$$

Donc d'après le Théorème limite centrale, on a bien $\frac{W_n - E(W_n)}{\sqrt{V(W_n)}} = W_n$ qui converge en loi

vers une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Partie 3.

8. ~~on~~ $\gamma_1 \subset \mathcal{E}(\lambda)$, donc une densité de γ_1 est $f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Donc:

$$\begin{aligned} \underline{L(\lambda, x_1 \dots x_n)} &= \prod_{k=1}^n \lambda e^{-\lambda x_k} \\ &= \lambda^n \prod_{k=1}^n e^{-\lambda x_k} \\ &= \lambda^n e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k} \end{aligned}$$

On en déduit que:

$$\underline{\psi(\lambda; x_1 \dots x_n) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^n x_k}$$

b. ψ est une fonction polynomiale sur $(\mathbb{R}_+^n)^{n+1}$, elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On a:

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \partial_i \psi(\lambda; x_1 \dots x_n) = -\lambda x_i$$

Donc ~~car~~ comme les $x_1 \dots x_n$ ne sont pas nuls, on a pas l'existence d'un point $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$ tel que $\partial_i \psi(\lambda, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = 0$ (pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$).
Donc ψ n'admet pas de point critique.

c. On a $\ell(\lambda) = n \ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^n x_k$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et:

$$\ell'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^n x_k$$

Donc on déduit de là que ℓ atteint son maximum en un point qui vérifie

$$Z_n = \frac{n}{\sum_{k=1}^n X_k}$$

Donc $\forall \lambda > 0$, $e(\lambda) \leq e(Z)$, d'où par croissance de $x \mapsto e^x$: $e^{e(\lambda)} \leq e^{e(Z)}$

D'où : $L(\lambda, x_1 \dots x_n) \leq L(Z, x_1 \dots x_n)$

11. $E(Z_n) = n E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{n}{n-1} \lambda$ d'après la S.a.

De plus $V(Z_n) = n^2 \times V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{n^2 \lambda^2}{(n-1)^2 (n-2)}$

d'après la S.b.

On en déduit que $E(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \lambda$ et que $V(Z_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc que Z_n est biaisé mais asymptotiquement sans biais pour λ .

12. On se dit de la partie précédente que $\frac{n-1}{n} Z_n$ est un estimateur sans biais de λ .

On le note $\tilde{Z}_n$. $V(\tilde{Z}_n) = \frac{(n-1)^2}{n^2} V(Z_n)$
 $= \frac{\lambda^2}{n-2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

Donc $\tilde{Z}_n$ est un estimateur convergent de λ .

13. On sait que $P(-b \leq W_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \phi(b) - \phi(-b)$ d'après la proposition 7.a.

Donc $P(-b \leq W_n \leq b) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\phi(b) - 1$.

On peut donc b tel que $2\phi(b) - 1 = 1 - \alpha$

D'où $2\phi(b) = 2 - \alpha$

D'où $\phi(b) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

et $b = \phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) = b_\alpha$.

Donc $P(-t_\alpha \leq U_m \leq t_\alpha) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha.$

Donc $P\left(-t_\alpha \leq \frac{\lambda}{\sqrt{m}} S_n - \sqrt{m} \leq t_\alpha\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha$

$$= -t_\alpha + \sqrt{m} \leq \frac{\lambda}{\sqrt{m}} S_n \leq t_\alpha + \sqrt{m}$$

$$= -t_\alpha \sqrt{m} + m \leq \lambda S_n \leq t_\alpha \sqrt{m} + m$$

$$= \left(-\frac{t_\alpha \sqrt{m}}{S_n} + \frac{m}{S_n} \leq \lambda \leq \frac{t_\alpha \sqrt{m}}{S_n} + \frac{m}{S_n} \right)$$

Donc:

$$P\left(-\frac{t_\alpha \sqrt{m}}{S_n} + \frac{m}{S_n} \leq \lambda \leq \frac{t_\alpha \sqrt{m}}{S_n} + \frac{m}{S_n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \alpha$$

On a donc bien $\left[\frac{m}{S_n} \left(1 - \frac{t_\alpha}{\sqrt{m}}\right); \frac{m}{S_n} \left(1 + \frac{t_\alpha}{\sqrt{m}}\right) \right]$ qui est un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1 - \alpha$ pour λ .

14. def IdC(alpha, Y):

$$n = \text{len}(Y)$$

$$z = n / (n * Y)$$

$$t = \text{sp. matrix}(1 - \text{alpha}/2)$$

$$A = z * (1 - t / \text{np. sqrt}(n))$$

$$B = z * (1 + t / \text{np. sqrt}(n))$$

$$\text{return } [A, B].$$

Partie 4.

16.a. On a $\frac{U_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{n+1}{n} e^{-(n+1)} \sqrt{2\pi(n+1)}}{\binom{n+1}{n}} \times \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-(n+1)+n} \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^n e^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n e^{-1} \sqrt{1 + \frac{1}{n}}$$

Code épreuve : 235

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de : Maths EM

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

$$\text{Donc } \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) = n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$= n \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) + 1 + \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\sim \frac{1}{12n^2}$$

b. Comme on a la convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$, et que $\frac{1}{12n^2} \geq 0$, (crite de Riemann), on a par $\frac{1}{12n^2}$ est d'équivalence au des séries à termes positifs la convergence de $\sum_{n \geq 1} V_n$.

$$\text{Donc : } V_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$$

$$\text{Donc : } \sum_{n=1}^N V_n = \ln(u_{N+1}) - \ln(u_1)$$

$$\text{Donc } \ln(u_{N+1}) = \sum_{n=1}^N V_n + \ln(u_1)$$

Donc par convergence de $\sum_{n \geq 1} V_n$, on a la convergence de $\ln(u_n)_{n \geq 1}$, donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tq $\ln(u_{n+1}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} K$

Donc par continuité de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}^+$,

$$u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^k > 0$$

Donc $(u_n)_{n \geq 1}$ converge vers une limite $l \gg 0$

17. On sait que :

$$f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda} \leq 0 \\ \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\sqrt{n}t+n} (\sqrt{n}t+n)^{n-1} & \text{si } \frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda} \geq 0 \end{cases}$$

Donc :

$$f_{S_n}\left(\frac{\sqrt{n}}{\lambda}t + \frac{n}{\lambda}\right) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\sqrt{n} \\ \frac{\lambda}{(n-1)!} e^{-\sqrt{n}t+n} (\sqrt{n}t+n)^{n-1} & \text{si } t \geq -\sqrt{n} \end{cases}$$

Donc :

$$f_{W_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\sqrt{n} \\ \frac{\sqrt{n}}{(n-1)!} e^{-\sqrt{n}t+n} (\sqrt{n}t+n)^{n-1} & \text{si } t \geq -\sqrt{n} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -\sqrt{n} \\ \frac{u_n}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t} & \text{si } t \geq -\sqrt{n} \end{cases}$$

18.a. Soit $n \in \mathbb{N}^+$ et $t > -\sqrt{n}$.

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{n-1} e^{-\sqrt{n}t}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \times \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{-\sqrt{n}t}$$

Mais - $e^{n R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} e^{-\frac{t^2}{2}} = e^{n \left(\ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \frac{t}{\sqrt{n}} + \frac{\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2}{2} \right) + \frac{t^2}{2}}$

$$= e^{n \ln\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \sqrt{n}t + \frac{t^2}{2} - \frac{t^2}{2}} = e$$

Dans on a bien:

$$f_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^{-1} e^{n R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} e^{-t^2/2}$$

b. D'après l'ingélté de Taylor Lagrange
 et l'encadrement 3 appliqué à $f(x) = \ln(1+x)$
 entre $[0, u]$, pour $u \in [-\frac{1}{2}, 1]$

$$\left| \ln(1+u) - u + \frac{u^2}{2} \right| \leq \max_{[-\frac{1}{2}, 1]} |f^{(3)}(t)| \times \frac{|u^3|}{3!}$$

Dans on pose $M_1 = \max_{[-\frac{1}{2}, 1]} |f^{(3)}(t)| \times \frac{1}{3!} \geq 0$.
 On a donc bien:

$$|R(u)| \leq M_1 |u^3|$$

On en déduit que: $|R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)| \leq M_1 \frac{t^3}{n\sqrt{3}}$

Dans que:

$$R\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par encadrement.}$$

Dans, comme $\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$, on a bien

$\forall t \in \mathbb{R}$ (car quand $n \rightarrow +\infty$, $t > -\sqrt{n}$ revient à dire $t \in \mathbb{R}$):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) = e \cdot \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} = e f_2(t).$$

19. a. : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$ en tant que composition linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.

$$g_n(t) = \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{\sqrt{n}}} \right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}$$

$$\begin{aligned} g_n'(t) &= \frac{-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2} e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} + \left(\frac{1}{1 + \frac{t}{\sqrt{n}}} \right) \frac{n}{\sqrt{n}} R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \left(\frac{-\frac{1}{\sqrt{n}}}{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2} + \frac{\sqrt{n} \cdot R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}{1 + \frac{t}{\sqrt{n}}} \right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \\ &= \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\left(1 + \frac{t}{\sqrt{n}}\right)^2} \right) + R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \times \sqrt{n} \right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)} \end{aligned}$$

Donc on a, par l'identité triangulaire et comme $t \in [0, 1]$:

$$|g_n'(t)| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} |R'\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)| \right) e^{nR\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)}.$$

$$\begin{aligned} \text{ii. On a } |R'(u)| &= \frac{1}{1+u} - 1 + u \\ &= \frac{1 - (1+u) + u(1+u)}{1+u} \\ &= \frac{-u + u + u^2}{1+u} \\ &= \left| \frac{u^2}{1+u} \right| \end{aligned}$$

Mais $1+u \geq 1$, donc $\frac{1}{1+u} \leq 1$ et $\frac{1}{1+u} \leq 1$, donc $|R'(u)| \leq M_2 u^2$, où $M_2 = 1$.

Code épreuve : 235

Nombre de pages : 25

Session : 2024

Épreuve de : Math EM

Consignes

- Remplir soigneusement l'en-tête de chaque feuille avant de commencer à composer
- Rédiger avec un stylo non effaçable bleu ou noir
- Ne rien écrire dans les marges (gauche et droite)
- Numéroté chaque page (cadre en bas à droite)
- Placer les feuilles A3 ouvertes, dans le même sens et dans l'ordre

iii. D'après la question précédente : $|B'(\frac{t}{\sqrt{n}})| \leq M_2 \frac{1}{\sqrt{n}}$
De plus, d'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|g_n(t) - g_n(0)| \leq \max_{t \in [0,1]} |g'_n(t)| \times |t - 0| \leq \max_{t \in [0,1]} |g'_n(t)|$$

D'où :

$$\begin{aligned} |g_n(t) - 1| &\leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{n} \times \frac{M_2}{n} \right) e^{n \frac{M_1}{(\sqrt{n})^3}} \quad (18.6) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} (1 + M_2) e^{n \frac{M_1}{(\sqrt{n})^3}} \end{aligned}$$

Donc on note $C_1 = (1 + M_2) e^{n \frac{M_1}{(\sqrt{n})^3}}$ et on a bien $C_1 \geq 0$ avec :

$$|g_n(t) - 1| \leq \frac{C_1}{\sqrt{n}}$$

19.c. On a donc par encadrement : comme :

$$\bullet C_2 |t_n - t| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\bullet \frac{C_1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

par encadrement : $\int_0^1 f_{w_n}(t) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_0^1 t f_2(t) dt$

↳ On vérifie aisément que $f_{un}(t) - lf_z(t)$
 $= (u_n - l)g_n(t) + l(g_n(t) - 1)f_z(t)$.

Donc :

$$\left| \int_0^1 f_{un}(t) dt - \int_0^1 lf_z(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 f_{un}(t) - lf_z(t) dt \right|$$

$$= \left| \int_0^1 (u_n - l)g_n(t) + l(g_n(t) - 1)f_z(t) dt \right|$$

$$\leq \int_0^1 |(u_n - l)g_n(t) + l(g_n(t) - 1)f_z(t)| dt$$

$$\leq \left(C_2 |u_n - l| + \frac{lC_2}{u_n} \right) \int_0^1 f_z(t) dt$$

d'après 19.a. iii et 19.a. iv.

