CORRIGÉ DU SUJET HEC MATHS 1 ECS 2016

Mon compte | Mes cours | Mes exercices | Mes QCM

Mes parcours pour réussir en maths

- Je révise en autonomie
- Je progresse avec un coach
- Je révise pour des années corrigées

Je cherche un prof de maths !

Aide Soutien Prépa
★★★★★ 4.7/5 (+)

Partie I. Partitions de l'identité

Q.1.a Il est aisé de trouver trois triangles dont aucun sommet n'appartient à la droite (D) :

$$\left\{A,B,C\right\} \subset \left\{\left(\begin{array}{c}1\\0\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\1\\0\end{array}\right),\left(\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right)\right\}$$

Il existe cinq autres triplets de cette nature non-plus prendre les lettres $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$:

Dans ces trois triplets les trois angles $\widehat{Abc}$, $\widehat{Bca}$ et $\widehat{Cab}$ valent $\frac{\pi}{2}$: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \frac{\pi}{2}$.

$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$

$A \in (D)$, $B \in (D)$, $C \in (D)$ et aucun sommet n'appartient à la droite (D) : $\alpha = \widehat{Abc} + \widehat{Bca} + \widehat{Cab} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}$.

donc $\widehat{Abc} + \widehat{Bca} + \widehat{Cab} = \widehat{Abc} + \widehat{Bca} + \widehat{Cab} = \frac{\pi}{2}$ donc

$$\boxed{\text{Il n'est pas disponible}}$$

Q.1.b Après quelques ajustements : $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ donc

$$\boxed{A \in \mathcal{P} \text{ et } \mathcal{P} \text{ est la partition associée de } A}$$

Q.1.c Supposons que le triplet α existe alors $\mathcal{P}$ de type $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ donc

$$\boxed{\text{Il n'est pas disponible, donc}}$$

Q.1.d Il est disponible, donc

$$\boxed{\mathcal{P} = \left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)}$$

Pour la suite de la question, on pose $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}\right)$.

Soit $\alpha \in \mathcal{L}$ donc $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right) \in \left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ donc

$$\boxed{\text{Il est aisé de trouver trois triangles dont aucun sommet n'appartient à la droite } (D) \text{ : } \alpha = \widehat{Abc} + \widehat{Bca} + \widehat{Cab} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}.}$$

donc $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right) \in \left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$ donc

$$\boxed{\text{Il est aisé de trouver trois triangles dont aucun sommet n'appartient à la droite } (D) \text{ : } \alpha = \widehat{Abc} + \widehat{Bca} + \widehat{Cab} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}.}$$

Q.2.a Il est aisé de trouver $\left(\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}\right)$

Donc $\forall j \in [\![1,k]\!],\ MU_j = 0$, donc

$$\boxed{MU = 0.}$$

(iii) On pose $U = N - M^{(-)}$.

On a d'après (i), car N et $M^{(-)}$ sont des inverses de Penrose-Moore,

$M^2U = M^2N - M^2M^{(-)} = M - M = 0$. Donc $M^2U = 0$, donc d'après (ii), $MU = 0$,

donc $MN = MM^{(-)}$.

De plus, en reprenant le même type de calculs qu'au (i),

$M = M\underbrace{NM}_{} = M\,{}^t(NM) = M\,{}^tM\,{}^tN = M^2\,{}^tN$ car N est symétrique.

Et en prenant $U = {}^tN - {}^t\left(M^{(-)}\right)$, on trouve de même que ci-dessus, $M\,{}^tN = M\,{}^t\left(M^{(-)}\right)$.

Donc $N \underset{(i)}{=} M\,{}^tN\,N \underset{(iii)}{=} M\,{}^t\left(M^{(-)}\right)N \underset{M \text{ sym}}{=} {}^t\left(M^{(-)}M\right)N \underset{\text{déf}}{=} M^{(-)}MN$

Donc $N \underset{(iii)}{=} M^{(-)}MM^{(-)} \underset{\text{déf}}{=} M^{(-)}$. Donc

$$\boxed{N = M^{(-)}.}$$

Donc si N est une inverse de Penrose-Moore de M, alors N est unique et $N = M^{(-)}$.

On a montré au a) que $M^{(-)}$ était une inverse de Penmore-Moore de M.

Donc

$$\boxed{M^{(-)} \text{ est l'unique inverse de Penrose-Moore de } M.}$$

8/ a/ Résultat préliminaire : soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{R})$.

On a $Im(AB) \subset Im(A)$, donc $rg(AB) \leqslant rg(A)$.

Une matrice et sa transposée ayant même rang, on a

$rg(AB) = rg\left({}^t(AB)\right) = rg\left({}^tB\,{}^tA\right) \leqslant rg\left({}^tB\right) = rg(B)$.

Donc $rg(AB) \leqslant rg(A)$ et $rg(AB) \leqslant rg(B)$.

Ici, $P = \underbrace{S}_{=A}\underbrace{\left({}^tS\,S\right)^{(-)}\,{}^tS}_{=B}$, donc $rg(P) \leqslant rg(S)$.

De plus, $P = S\left({}^tS\,S\right)^{(-)}\,{}^tS$, donc ${}^tS\,P\,S = {}^tSS\left({}^tS\,S\right)^{(-)}\,{}^tS\,S = {}^tS\,S$ par définition de $\left({}^tS\,S\right)^{(-)}$ au début du 15.

Donc ${}^tS\,P\,S = {}^tS\,S$, donc $rg\left({}^tS\,P\,S\right) = rg\left({}^tS\,S\right) = rg(S)$ d'après 14.a), donc $rg\left({}^tS\,P\,S\right) = rg(S)$.

De plus, d'après le résultat préliminaire, $rg\left({}^tS\,P\,S\right) \leqslant rg(PS) \leqslant rg(P)$.

Donc $rg(S) \leqslant rg(P)$.

Donc

$$\boxed{rg(S) = rg(P).}$$

b/ En utilisant les propriétés de $\left({}^tS\,S\right)^{(-)}$, on montre que ${}^tP = P$ et que $P^2 = P$, donc que P est la matrice d'un projecteur orthogonal que l'on note p.

D'après 14.c/ pour $x \in F^{\perp}$, On a ${}^tS\,X = 0$, donc $PX = 0$, donc $F^{\perp} \subset \ker(p)$.

Or $\dim\left(F^{\perp}\right) = n - \dim(F) = n - rg(S) = n - rg(P) = \dim(\ker(p))$. Donc $F^{\perp} = \ker(p)$.

Donc

$$\boxed{p \text{ est le projecteur orthogonal sur } F.}$$

9/ a/ On sait que $rg(S) = rg\left({}^tS\,S\right)$. Or ${}^tS\,S \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et ${}^tS\,S$ n'est pas inversible, donc $rg\left({}^tS\,S\right) \leqslant 1$, donc $rg(S) \leqslant 1$ et (s_1, s_2) est une famille liée.

Comme $s_1 \neq 0, \exists \theta \in \mathbb{R}\ /\ s_2 = \theta s_1$, donc

$$\boxed{\exists \theta \in \mathbb{R}\ /\ \forall i \in [\![1,n]\!],\ \beta_i = \theta\alpha_i.}$$

b/ On a :

$$\begin{aligned}{}^tS\,S &= \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \\ \theta\alpha_1 & \cdots & \theta\alpha_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \theta\alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \theta\alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n \alpha_i^2 & \theta\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i^2 \\ \theta\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i^2 & \theta^2\sum\limits_{i=1}^n \alpha_i^2 \end{pmatrix} \\ &= \|s_1\|^2\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}}_{=M}.\end{aligned}$$

Les deux colonnes de M sont proportionnelles, donc M n'est pas inversible, et 0 est valeur propre de M. Un vecteur propre associée est, par exemple, $\begin{pmatrix} \theta \\ -1 \end{pmatrix}$.

M est symétrique réelle, donc diagonalisable dans une base orthonormée de vecteurs propres et il existe Q orthogonale et Δ diagonale telles que $M = Q \times \Delta \times {}^tQ$.

On pose, par exemple, $\Delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

M et Δ sont semblables, donc ont même trace, donc $tr(M) = tr(\Delta)$, donc $\lambda = 1 + \theta^2$.

Un vecteur propre associé à $1 + \theta^2$ est, par exemple, $\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}$.

La famille $\left(\frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\begin{pmatrix} 1 \\ \theta \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\begin{pmatrix} \theta \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ est donc une famille de vecteurs propres, clairement orthonormée. Elle est donc libre, de cardinal 2, et comme $\dim\left(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})\right) = 2$, c'est une base orthonormée de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Donc, en posant $Q = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix}$, on a bien ${}^tS\,S = Q \times \begin{pmatrix} \|s_1\|^2\left(1+\theta^2\right) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times {}^tQ$.

Donc

$$\boxed{Q = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} \text{ est telle que } {}^tQSSQ \text{ est diagonale.}}$$

c/ D'après la question **7/ b/**, on a :

$$\begin{aligned}\left({}^tS\,S\right)^{(-)} &= Q \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\|s_1\|^2(1+\theta^2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times {}^tQ = \frac{1}{1+\theta^2}\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{\|s_1\|^2(1+\theta^2)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|s_1\|^2\left(1+\theta^2\right)^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\|s_1\|^2\left(1+\theta^2\right)^2}\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\left({}^tSS\right)^{(-)} = \frac{1}{\|s_1\|^2(1+\theta^2)^2}\begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix}.}$$

d/ On reprend les notations de la question 8, et on note P la matrice de p_F dans la base $\mathcal{B}$.

On a donc

$$\begin{aligned}PX &= S\left({}^tSS\right)^{(-)}\,{}^tSX \\ &= \frac{1}{\|s_1\|^2\left(1+\theta^2\right)^2}\begin{pmatrix} \alpha_1 & \theta\alpha_1 \\ \alpha_2 & \theta\alpha_2 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \theta\alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & \theta \\ \theta & \theta^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \theta\alpha_1 & \theta\alpha_2 & \cdots & \theta\alpha_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\|s_1\|^2\left(1+\theta^2\right)^2}\begin{pmatrix} \alpha_1\left(1+\theta^2\right) & \alpha_1\theta\left(1+\theta^2\right) \\ \alpha_2\left(1+\theta^2\right) & \alpha_2\theta\left(1+\theta^2\right) \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n\left(1+\theta^2\right) & \alpha_n\theta\left(1+\theta^2\right) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^n \alpha_ix_i \\ \theta\sum\limits_{i=1}^n \alpha_ix_i \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Donc $PX = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \alpha_ix_i}{\|s_1\|^2}\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$, donc

$$\boxed{p_F(x) = \frac{\sum\limits_{i=1}^n \alpha_ix_i}{\|s_1\|^2}.s_1 = \frac{\langle s_1, x\rangle}{\|s_1\|^2}s_1.}$$

... et on retrouve la formule du cours, car $F = vect(s_1, s_2) = vect(s_1)$ puisque (s_1, s_2) est liée et $s_1 \neq 0$.

COURS PARTICULIERS
Nous avons sélectionné pour vous les meilleurs professeurs particuliers.
POUR ACCÉLÉRER MA PROGRESSION
Je trouve des cours particuliers
Avis Google France ★★★★★ 4,9 sur 5

Partie III : densité et gaussienne centrée

10/ • Soit $i \in [\![1,n]\!]$. $X_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right)$, donc $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.

• Soit Z une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$. On note Φ sa fonction de répartition et $\varphi : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$ sa densité usuelle.

On note $T = \frac{Z^2}{2}$

On a $T(\Omega) = \mathbb{R}_+$, donc, pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, $F_T(x) = 0$.
Pour $x \in \mathbb{R}_+$, $F_T(x) = P(T \leqslant x) = P\left(Z^2 \leqslant 2x\right) = P\left(|Z| \leqslant \sqrt{2x}\right)$

$= P\left(-\sqrt{2x} \leqslant Z \leqslant \sqrt{2x}\right) = \Phi\left(\sqrt{2x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2x}\right)$.

Or Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
De plus $x \mapsto \sqrt{2x}$ et $x \mapsto -\sqrt{2x}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. F_T étant nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, on a aussi F_T est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$.

Enfin $\lim\limits_{x\to 0^-} F_T(x) = 0$, $F_T(0) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} F_T(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\Phi\left(\sqrt{2x}\right) - \Phi\left(-\sqrt{2x}\right)\right) = 0$ car Φ est continue en 0 et $\sqrt{2x}$ tend vers 0 quand x tend vers 0^+, donc F_T est continue en 0.

F_T est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en 0, donc

$$\boxed{T \text{ est une variable à densité.}}$$

On obtient une densité de T en dérivant F_T sur $\mathbb{R}^*$ et en donnant une valeur arbitraire positive à $F_T(0)$.

Donc une densité f_T est donnée par :

$$f_T(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi\left(\sqrt{2}\sqrt{x}\right) + \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\varphi\left(-\sqrt{2}\sqrt{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f_T(x) = \begin{cases} 2 \times \sqrt{2}\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases} =$$

D'où : $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{x}}\exp(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Donc $f_T(x) = \begin{cases} \frac{x^{\frac{1}{2}-1}}{\sqrt{\pi}}\exp(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$

f_T étant une densité, on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t)\,dt = 1$, donc $\int_0^{+\infty}\frac{t^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{\sqrt{\pi}}\exp(-t)\,dt = 1$.

Donc, on a $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}} = 1$.

Donc $\sqrt{\pi} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$, et on trouve :

$$\boxed{f_T(x) = \begin{cases} \frac{x^{\left(\frac{1}{2}-1\right)}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\exp(-x) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}}$$

. Donc

$$\boxed{T \text{ suit la loi } \gamma\left(\tfrac{1}{2}\right).}$$

• On note, pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $T_i = \frac{1}{2}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$. Comme $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, on sait que $T_i \hookrightarrow \gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ par le point précédent.

Les variables $T_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, sont indépendantes (par le lemme des coalitions car les $X_i, 1 \leqslant i \leqslant n$, le sont), et toutes de loi $\gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

Donc, par stabilité de la loi γ, $\sum\limits_{i=1}^n T_i$ suit la loi $\gamma\left(\frac{n}{2}\right)$, donc

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \hookrightarrow \gamma\left(\tfrac{n}{2}\right).}$$

donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^n\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \hookrightarrow \chi^2(n).}$$

11/ a/ On pose $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$H = MG$, donc pour $i \in [\![1,n]\!]$, $H_i = \sum\limits_{j=1}^n \underbrace{m_{i,j}}_{\text{réel}}G_j$.

$(G_1, ..., G_n)$ est un vecteur gaussien, donc par définition, pour $i \in [\![1,n]\!]$, H_i est une variable gaussienne centrée.

Soit alors $a = (a_1, ..., a_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

$$\sum_{i=1}^n a_iH_i = \sum_{i=1}^n\left(a_i\sum_{j=1}^n m_{i,j}G_j\right) = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a_im_{i,j}G_j = \sum_{j=1}^n\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}a_i\right)}_{\text{réel}}G_j.$$

$(G_1, ..., G_n)$ est un vecteur gaussien, donc par définition, $\sum\limits_{i=1}^n a_iH_i$ est une variable gaussienne centrée.

Donc

$$\boxed{(H_1, ..., H_n) \text{ est un vecteur gaussien.}}$$

b/ Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, G_i admet un moment d'ordre 2, donc d'après le cours,

$$\boxed{\text{pour tout } (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ G_iG_j \text{ admet une espérance.}}$$

12/ a/ Soit $a = (a_1, ..., a_n)$.

Si $a = 0$, alors $\sum\limits_{i=1}^n a_iG_i = 0$ et $\sum\limits_{i=1}^n a_iG_i$ est une gaussienne centrée.

On suppose $a \neq 0$ pour la suite du raisonnement.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

• ou bien $a_i \neq 0$. Alors $a_iG_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, a_i^2\right)$ (stabilité par transformation affine de la loi normale).

• ou bien $a_i = 0$. Alors a_iG_i est la variable constante nulle.

On note $I = \{i \in [\![1,n]\!]\ /\ a_i \neq 0\}$. $I \neq \varnothing$ car $a \neq 0$.

Les variables $a_iG_i,\ i \in I$, sont indépendantes et toutes de loi normale, donc, par stabilité de la loi normale, $\sum\limits_i a_iG_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum\limits_i a_i^2\right)$.

Or $\sum\limits_{i\in I} a_iG_i = \sum\limits_{i=1}^n a_iG_i$ car on rajoute des variables constantes nulles et $\sum\limits_i a_i^2 = \sum\limits_{i=1}^n a_i^2$ car on rajoute des termes nuls,

donc $\sum\limits_{i=1}^n a_iG_i \hookrightarrow \mathcal{N}\left(0, \sum\limits_{i=1}^n a_i^2\right)$.

Donc $\sum\limits_{i=1}^n a_iG_i$ est une gaussienne centrée.

Donc pour tout $a = (a_1, ..., a_n)$, $\sum\limits_{i=1}^n a_iG_i$ est une gaussienne centrée,

donc

$$\boxed{(G_1, G_2, ..., G_n) \text{ est un vecteur gaussien.}}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$.

$E(G_iG_j) = E(G_i)E(G_j)$ car G_i et G_j sont indépendantes.

Donc $E(G_iG_j) = 0$ car $E(G_i) = 0$.

Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Alors $E(G_iG_i) = E\left(G_i^2\right) \underset{\text{Koenig-Huygens}}{=} \underbrace{V(G_i)}_{=1} + \underbrace{[E(G_i)]^2}_{=0} = 1$.

Donc

$$\boxed{\Lambda(G) = I_n.}$$

b/ On note $Q = (q_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

$H = QG$, donc par définition du produit matriciel, on a $\forall i \in [\![1,n]\!],\ H_i = \sum\limits_{j=1}^n q_{i,j}G_j$.

Q est orthogonale, donc $Q\,{}^tQ = I_n$

• Soit $i \in [\![1,n]\!]$.

$(G_1, ..., G_n)$ est un vecteur gaussien d'après la question précédente.

Donc $(H_1, ..., H_n)$ est un vecteur gaussien d'après la question 11/ a/.

En prenant $a = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, avec 1 en $i^{ème}$ position, on a H_i est une gaussienne centrée.

Or $V(H_i) = V\left(\sum\limits_{j=1}^n q_{i,j}G_j\right) = \sum\limits_{j=1}^n (q_{i,j})^2\underbrace{V(G_j)}_{=1}$ car les variables $G_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, sont mutuellement indépendantes.

Donc $V(H_i) = \sum\limits_{j=1}^n (q_{i,j})^2 = \sum\limits_{j=1}^n q_{i,j} \times q_{i,j} = 1$ car on reconnaît un terme diagonal de $Q\,{}^tQ = I_n$.

Donc

$$\boxed{H_i \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1).}$$

• Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

$E(H_iH_j) = E\left(\left(\sum\limits_{k=1}^n q_{i,k}G_k\right)\left(\sum\limits_{l=1}^n q_{j,l}G_l\right)\right)$

$= E\left(\sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{l=1}^n q_{i,k}q_{j,l}G_kG_l\right)$

$= \sum\limits_{k=1}^n\sum\limits_{l=1}^n q_{i,k}q_{j,l}E(G_kG_l)$ par linéarité de l'espérance

$= \sum\limits_{k=1}^n q_{i,k}q_{j,k}\underbrace{E\left(G_k^2\right)}_{=1} + \sum\limits_{k\neq l} q_{i,k}q_{j,l}\underbrace{E(G_kG_l)}_{=0}$ d'après $a)$

$= \sum\limits_{k=1}^n q_{i,k}q_{j,k}$

On reconnaît le terme général de $Q\,{}^tQ$.

Donc $\Lambda(H) = Q\,{}^tQ = I_n$ car Q est une matrice orthogonale.

Donc

$$\boxed{\Lambda(H) = \Lambda(G).}$$

Donc pour tout $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$P\left(\bigcap\limits_{i=1}^n (H_i \leqslant x_i)\right) = P\left(\bigcap\limits_{i=1}^n (G_i \leqslant x_i)\right)$

$= \prod\limits_{i=1}^n P(G_i \leqslant x_i)$ par indépendance des $G_i, 1 \leqslant i \leqslant n$

$= \prod\limits_{i=1}^n P(H_i \leqslant x_i)$ car H_i et G_i ont même loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Donc

$$\boxed{\text{les variables } H_1, H_2, ..., H_n \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

13/ a/ $\sum\limits_{i=1}^k P_i = I_n$ et $\sum\limits_{i=1}^k r_i = n$, donc d'après la question $3.c/$, $P_1, P_2, ..., P_k$ sont des matrices de projecteurs notés respectivement $p_1, p_2, ..., p_k$.

De plus, $P_1 = mat_{\mathcal{B}}(p_1), ..., P_k = mat_{\mathcal{B}}(p_k)$ sont symétriques réelles et $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, donc d'après la question 4.a),

$$\boxed{P_1, ..., P_k \text{ sont des matrices de projecteurs orthogonaux.}}$$

Soit $(i,j) \in [\![1,k]\!]^2$, avec $i \neq j$.

Soit $(x,y) \in Im(p_i) \times Im(p_j)$.

$\langle x, y\rangle = \langle p_i(x), p_j(y)\rangle$ car $Im(p_i) = \ker(p_i - Id_{\mathbb{R}^n})$ et $Im(p_j) = \ker(p_j - Id_{\mathbb{R}^n})$

Donc $\langle x, y\rangle = \langle x, p_i(p_j(y))\rangle$ car p_i est un endomorphisme symétrique (sa matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ orthonormée est symétrique réelle)

Or $p_i \circ p_j = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)}$ d'après la question 3.c/ puisque $i \neq j$, donc $\langle x, y\rangle = 0$.

Donc

$$\boxed{Im(p_i) \text{ et } Im(p_j) \text{sont orthogonaux.}}$$

b/ D'après la question 3, on a $\mathbb{R}^n = \bigoplus\limits_{i=1}^k Im(p_i)$.

On note, pour $i \in [\![1,k]\!]$, $\mathcal{B}'_i$ une base orthonormée de $Im(p_i)$, et $\mathcal{B}'$ la concaténation des $\mathcal{B}'_i, 1 \leqslant i \leqslant k$. $\mathcal{B}'$ est donc une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

On note Q la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Q est la matrice de passage d'une base orthonormée à une base orthonormée, c'est donc une matrice orthogonale.

On note pour $i \in [\![1,k]\!]$, $\Delta_i = Q\,P_i\,{}^tQ = mat_{\mathcal{B}'}(p_i)$.

Pour $i \in [\![1,k]\!]$, p_i est le projecteur orthogonal sur $Im(p_i)$. Donc les vecteurs de $\mathcal{B}'_i$ ont pour image eux-mêmes car ils sont dans $Im(p_i)$, et les vecteurs de $\mathcal{B}' \backslash \mathcal{B}'_i$ sont dans $(Im(p_i))^{\perp}$ d'après la question précédente, donc dans $\ker(p_i)$.

Donc pour $i \in [\![1,k]\!]$, $\Delta_i = Diag\left(\underbrace{0, ..., 0}_{r_1 \text{ fois}}, ..., \underbrace{0, ..., 0}_{r_{i-1} \text{ fois}}, \underbrace{1, ..., 1}_{r_i \text{ fois}}, \underbrace{0, ..., 0}_{r_{i+1} \text{ fois}}, ..., \underbrace{0, ..., 0}_{r_k \text{ fois}}\right)$.

Donc

$$\boxed{\text{il existe } Q \text{ orthogonale telle que pour tout } i \in [\![1,k]\!],\ Q\,P_i\,{}^tQ \text{ est diagonale.}}$$

c/ On suppose que $r_1 \neq 0$. ${}^tG\,P_1\,G = {}^tG\,{}^tQ\,\Delta_1\,Q\,G = {}^t(QG)\ \Delta_1\ (QG)$

$(G_1, ..., G_k)$ est un vecteur gaussien et toutes les variables aléatoires ont une variance égale à 1, donc avec la même démarche qu'à la question 12.a), on montre que $G_1, ..., G_k$ suivent toutes la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

On pose $H = QG$.

Q est une matrice orthogonale, et $G_1, G_2, ..., G_k$ sont mutuellement indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc d'après la question 12.b/, $H_1, ..., H_k$ sont mutuellement indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

De plus, ${}^t(QG)\ \Delta_1\ (QG) = \sum\limits_{i=1}^{r_1} H_i^2$, et les variables aléatoires $H_1, ..., H_k$ sont mutuellement indépendantes et toutes de loi $\mathcal{N}(0,1)$, donc, d'après la question 10, avec $\mu = 0$ et $\sigma = 1$, $\sum\limits_{i=1}^{r_1} H_i^2 \hookrightarrow \chi^2(r_1)$. Donc

$$\boxed{{}^tG\,P_1\,G \hookrightarrow \chi^2(r_1).}$$

d/ Avec les mêmes notations qu'au **c/**, on a

$${}^tG\,P_1\,G = \sum_{i=1}^{r_1} H_i^2,\ \ {}^tG\,P_2\,G = \sum_{i=r_1+1}^{r_2} H_i^2,\ \ ...\ ,{}^tG\,P_k\,G = \sum_{i=r_{k-1}+1}^{r_k} H_i^2.$$

Or les variables $H_1, H_2, ..., H_k$ sont mutuellement indépendantes, donc par le lemme des coalitions,

$$\boxed{{}^tG\,P_1\,G, {}^tG\,P_2\,G, ..., {}^tG\,P_k\,G \text{ sont mutuellement indépendantes.}}$$

Copyright @ GROUPE REUSSITE - Mentions légales
groupe-reussite.fr est évalué 4,9/5 par 819 clients sur Google France